

TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

JEAN-PAUL BRASSELET E NGUYỄN THỊ BÍCH THUY

RESUMO. O Teorema de Poincaré-Hopf é um dos resultados da matemática mais usados não somente em matemática mas também em outras áreas da ciência. Há aplicações do Teorema de Poincaré-Hopf em física, química, biologia e mesmo em economia, psicologia, etc.

O Teorema de Poincaré-Hopf liga um invariante da combinatória : a característica de Euler-Poincaré com objetos da geometria diferencial, a saber índices de campos de vetores. Os resultados que ligam assim duas áreas bem diferentes da matemática podem ser considerados como os mais bonitos, úteis e fecundos.

1. INTRODUÇÃO

O Teorema de Poincaré-Hopf é bem conhecido, mas sua demonstração nem tanto. O objetivo desta apresentação é introduzir a prova, ou ao menos, uma ideia da prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso de superfícies, assim como algumas consequências.

Depois de lembrar o clássico Teorema de Poincaré-Hopf, introduzimos as noções envolvidas no Teorema: a característica de Euler-Poincaré e o índice de um campo de vetores em uma singularidade isolada.

Nas seções seguintes, damos definições equivalentes, no caso diferenciável, o que permite de providenciar a prova do Teorema de Poincaré-Hopf. Em primeiro lugar, lembramos a noção de fibrado tangente a uma curva \mathcal{C} suave e fechada em \mathbb{R} (§5.1), assim como as noções de valores e de pontos regulares e críticos e de grau de uma aplicação suave f de \mathcal{C} em \mathbf{S} , onde \mathbf{S} é a circunferência unitária.

Estas noções generalizam-se no caso de uma superfície suave \mathcal{S} , em particular a noção de fibrado tangente a uma superfície suave (§5.2). Definimos as noções de valores e pontos regulares e críticos e de grau de uma aplicação suave f de \mathcal{S} em \mathbf{S} (§5.2.2). Isso nos permite de estudar as singularidades de campos de vetores tangentes a uma superfície suave. Providenciamos vários exemplos (assim como desenhos correspondentes). O índice de um campo v de vetores tangentes a uma superfície, em um ponto singular isolado, define-se na seção §6.1 como o grau de uma aplicação suave $\gamma_v: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ definido na seção §5.1.2.

Passando na dimensão superior, em \mathbb{R} , o índice de um campo v de vetores em \mathbb{R} em um ponto singular isolado define-se como grau de uma aplicação suave $\gamma_v: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$, isto é o grau definido na seção precedente (§5.2.2). Mostramos neste ponto um resultado técnico que será usado na prova do Teorema de Poincaré-Hopf (Lemma 6.5).

Na seção seguinte enunciamos o Teorema de Poincaré-Hopf e, antes de providenciar a prova, damos vários exemplos nos casos orientado e não orientado. Em fim, damos a prova mesma primeiramente no caso orientado, em duas etapas. A primeira etapa é bem geométrica. Descrevemos a construção de um campo de vetores particulares, chamado o campo de Hopf, satisfazendo o Teorema de Poincaré-Hopf. A segunda etapa é um pouco mais técnica, mas já providenciamos todos ingredientes para mostrar que, em uma superfície

Este artigo é uma versão estendida dum curso providenciado durante a semana XXVIII SEMAT Semana de Matemática, 17 a 21 de Outubro de 2016. O primeiro autor tinha ajuda duma bolsa UNESP-FAPESP no. 2015/06697-9.

compacta orientada, a soma dos índices de um campo de vetores tangentes à superfície não depende do campo escolhido. Isso termine a prova no caso orientado. Concluímos dando a prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso não orientado.

2. ENUNCIADO DO TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

O Teorema de Poincaré-Hopf foi provado por Poincaré no ano 1885 no caso de superfícies, depois por Hopf, no ano 1927, para o caso de variedades suaves de dimensão maior.

Teorema 2.1. *Seja v um campo de vetores com singularidades isoladas, tangente a uma superfície S compacta, suave, sem borda e não necessariamente orientada. Temos*

$$\sum_{a_i} Iv, a_i \chi S,$$

onde os pontos a_i são os pontos singulares de v .

Nas duas primeiras seções, lembraremos a definição dos ingredientes do Teorema que são a característica de Euler-Poincaré e o índice de um campo de vetores em uma singularidade isolada. Nas seções seguintes daremos definições equivalentes, no caso diferenciável, o que permite de providenciar a prova do Teorema de Poincaré-Hopf.

3. CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Historicamente, a “característica de Euler-Poincaré” de uma superfície foi definida usando triangulações. Exemplos de triangulações da esfera S são dados na Figura 1.

Uma triangulação de uma superfície S é o dado de um poliedro (triangulado) $K \subset \mathbb{R}^n$ e de um homeomorfismo $h: |K| \rightarrow S$, onde $|K|$ é o subespaço topológico compacto de \mathbb{R}^n , que é a união dos simplexos do poliedro K .

Seja K uma triangulação de uma superfície compacta S , com números n de vértices, n de segmentos e n de triângulos, a característica de Euler-Poincaré de K é definida por

$$(3.1) \quad \chi K = n - n + n.$$

No caso da esfera S e na Figura 1, e pela triangulação do cubo, temos

$$n - n + n = 2.$$

Pela triangulação do tetraedro, temos

$$n - n + n = 2.$$

Há várias demonstrações algumas discutíveis, em particular por Descartes (1639) e Cauchy (1811), de que, no caso da esfera, a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação K escolhida (veja os artigos de Elon Lima [Li1, Li2], também [BN] e o site web [Epp]). Assim podemos denotar por χS e chamar de característica de Euler-Poincaré da esfera a quantidade χK para qualquer triangulação da esfera. Assim temos

$$\chi S = n - n + n = 2,$$

qualquer que seja a triangulação da esfera.

A invariância da triangulação vale para qualquer superfície compacta S e podemos definir χS como sendo χK para qualquer triangulação da superfície.

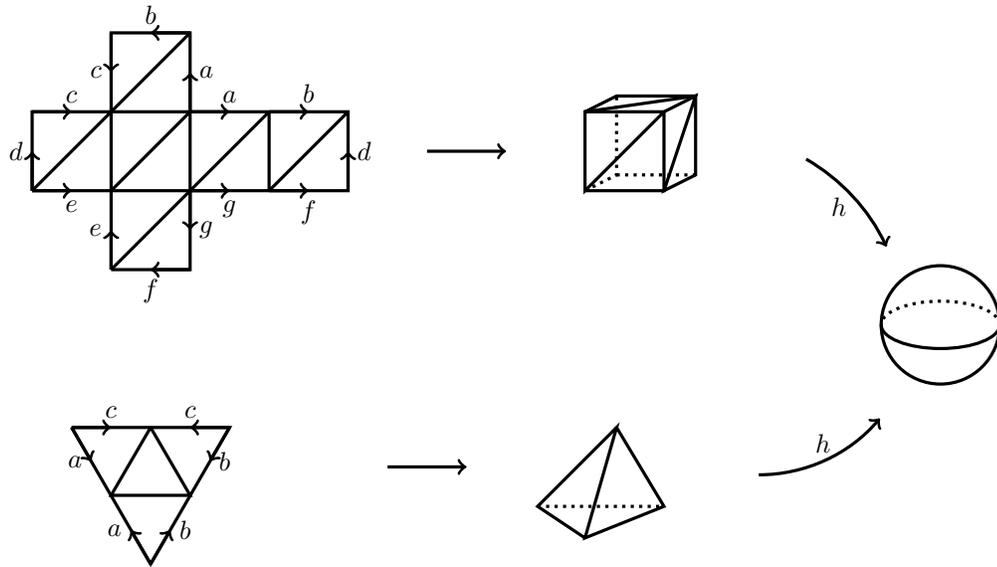


FIGURA 1. Triangulações da esfera. Nas representações planares identificam-se os segmentos de mesmo nome com a mesma orientação.

A característica de Euler-Poincaré do toro vale $\chi = 0$. Em geral, a característica de Euler-Poincaré de uma superfície compacta, sem borda e orientável é $2 - 2g$, onde g é o gênero da superfície. Lembramos que o gênero g de uma superfície (orientável ou não) é o número máximo de circunferências que se pode desenhar sobre a superfície sem desconectá-la. Por exemplo, o gênero de uma esfera é 0 , pois qualquer circunferência desenhada sobre a esfera a desconecta. O gênero de um toro é 1 , pois é possível desenhar uma circunferência sobre o toro sem desconectá-lo, mas qualquer segunda circunferência desenhada sobre o toro o desconecta (figura 2).

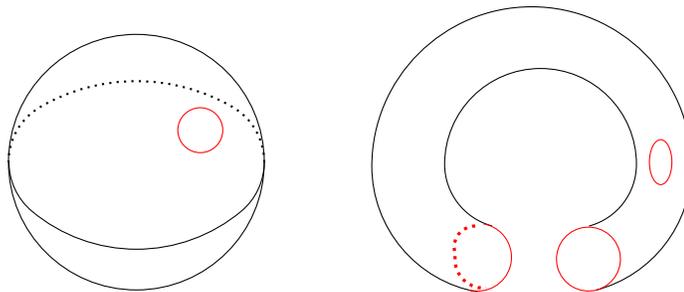
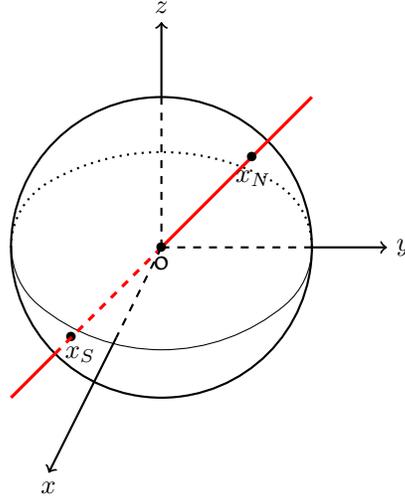


FIGURA 2. Gênero da esfera e do toro.

O plano projetivo \mathbb{P} é o conjunto de todas as retas do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 passando pela origem. Uma maneira fácil para representar o espaço projetivo é considerar em \mathbb{R}^3 a esfera S centrada na origem e de raio 1 . Consideramos três partes na esfera S : as semiesferas (abertas) norte e sul e o equador (veja figura 3).

FIGURA 3. Representação do espaço projetivo \mathbb{P} .

Cada reta de \mathbb{R} passando pela origem e não contida no plano xy encontra as semiesferas norte em um ponto x_N e sul em um ponto x_S . O ponto x_N pode ser considerado como um representante da reta. As retas contidas no plano xy encontram o equador em dois pontos diametralmente opostos, que temos que identificar para ter um representante só. Assim obtemos uma representação do plano projetivo \mathbb{P} , como sendo a semiesfera norte (ou seja um disco) com identificação de pontos diametralmente opostos na sua borda.

A característica de Euler-Poincaré do plano projetivo vale 2 , da garrafa de Klein vale 2 . Em geral, a característica de Euler-Poincaré de uma superfície compacta e sem borda, não orientável, de gênero k , vale $-k$.

Lembramos também que uma superfície compacta e sem borda pode ser mergulhada em \mathbb{R}^3 se, e somente se, ela é orientável.

4. ÍNDICE DE UM CAMPO DE VETORES NO PLANO

4.1. Índice de uma curva plana fechada. Seja a uma curva plana fechada e orientada no plano orientado \mathbb{R}^2 . Seja α um ponto não situada na curva a . Consideramos um pequena circunferência C_α de centro α tal que $C_\alpha \cap a = \emptyset$, orientada com orientação induzida por \mathbb{R}^2 .

Seja y um ponto na curva a e αy o ponto interseção $\alpha y = a \cap C_\alpha$. Quando y caminha sobre a curva a e descreve toda a curva no sentido (positivo) da curva, o ponto αy faz voltas sobre C_α no sentido positivo ou negativo. Seja p_α o número de voltas no sentido positivo e q_α o número de voltas no sentido negativo.

Definição 4.1. O índice I, α da curva a relativamente ao ponto α é a diferença

$$I, \alpha = p_\alpha - q_\alpha.$$

O número $p_\alpha - q_\alpha$ não depende do ponto de partida y sobre a curva a . Ele não depende também do ponto α situado na mesma componente conexa aberta de $\mathbb{R}^2 \setminus a$. Mas, em uma outra componente conexa aberta de $\mathbb{R}^2 \setminus a$, o índice I, β num ponto β pertencente a esta componente pode ser diferente de I, α .

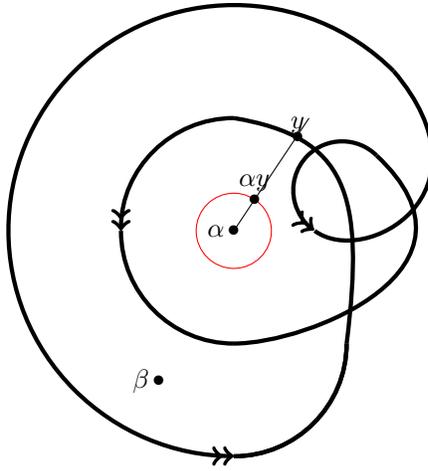


FIGURA 4. I, α ; I, β -

4.2. Índice de um campo de vetores planar em um ponto singular isolado. Consideramos agora uma circunferência S_a de centro a em \mathbb{R}^2 e um campo contínuo de vetores v_x definido sobre o disco fechado $D_a \subset \mathbb{R}^2$ cuja S_a é borda. Suponhamos que a única singularidade de v no disco D_a seja no ponto a . Isto é, a é o único ponto do disco D_a tal que $va = 0$.

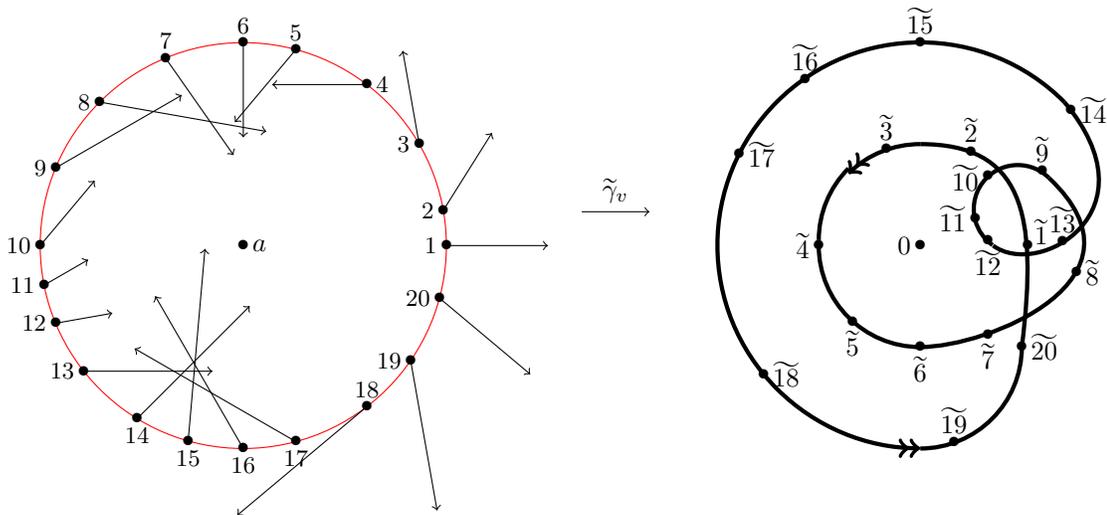


FIGURA 5. O campo de vetores v e a imagem de S_a^1 por $\tilde{\gamma}_v$. Temos $I(v, 0) = +2$. Para todo ponto i de S_a^1 , o ponto $\tilde{\gamma}_v(i)$ é denotado por \tilde{i} . O vetor $\vec{0\tilde{i}}$ é paralelo ao vetor $v(i)$.

Podemos definir uma aplicação $\tilde{\gamma}_v$ de S_a^1 em uma outra cópia de \mathbb{R}^2 denotado por $\tilde{\mathbb{R}}^2$ tal que para cada $x \in S_a^1$, o ponto $\tilde{\gamma}_v(x)$ seja a meta do vetor $\tilde{w}(x)$ paralelo a $v(x)$ e de origem à origem 0 de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A imagem de S_a^1 por $\tilde{\gamma}_v$ é uma curva $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_v(S_a^1)$. Observamos que, como v não se anula sobre S_a^1 , a curva $\tilde{\Gamma}$ não contém a origem 0 de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Definição 4.2. O índice $I(v, a)$ é definido como o índice da curva $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_v(S_a^1)$ relativamente ao ponto 0, isto é, $I(v, a) = I(\tilde{\Gamma}, 0)$.

5. GRAU DE UMA APLICAÇÃO SUAVE

5.1. Caso de curvas.

5.1.1. Fibrado tangente a uma curva suave e fechada. Seja \mathcal{C} uma curva suave e fechada em \mathbb{R}^2 . Em cada ponto x de \mathcal{C} , temos a reta tangente à \mathcal{C} no ponto x , que denotamos por $T_x\mathcal{C}$. Vemos que $T_x\mathcal{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre \mathbb{R} .

Um vetor tangente à curva suave \mathcal{C} no ponto x é um elemento $v(x)$ de $T_x\mathcal{C}$. Podemos definir um vetor tangente como a classe de equivalência de curvas diferenciáveis $c:]-1, +1[\rightarrow \mathcal{C}$ desenhadas sobre \mathcal{C} e tais que $c(0) = x$. Temos $v(x) = c'(0)$.

Denotamos $T\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} T_x\mathcal{C}$ e chamamos $T\mathcal{C}$ de espaço fibrado tangente à \mathcal{C} . Cada $T_x\mathcal{C}$ se chama fibra de $T\mathcal{C}$ no ponto x e é homeomorfa a \mathbb{R} . Chamamos \mathbb{R} de “fibra tipo”.

O fibrado $T\mathcal{C}$ é localmente trivial, isso significa que para todo ponto x de \mathcal{C} , existe uma vizinhança U_x de x em \mathcal{C} tal que

$$T\mathcal{C}|_{U_x} \cong U_x \times \mathbb{R},$$

onde $T\mathcal{C}|_{U_x}$ é a restrição de $T\mathcal{C}$ a U_x .

De fato, o fibrado tangente à \mathcal{C} é globalmente trivial ($T\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times \mathbb{R}$), mas veremos que esta propriedade não é verdadeira em geral. Por exemplo, o fibrado tangente à esfera S^2 não é globalmente trivial (veja a Seção (5.2)).

O fibrado $T\mathcal{C}$ tem uma visualização natural no plano \mathbb{R}^2 mas esta visualização não é conveniente. Uma maneira mais conveniente é olhar o plano \mathbb{R}^2 como plano horizontal em \mathbb{R}^3 e girar todas as retas tangentes em $+90^\circ$, verticalmente em relação ao plano \mathbb{R}^2 (veja Figura 6).

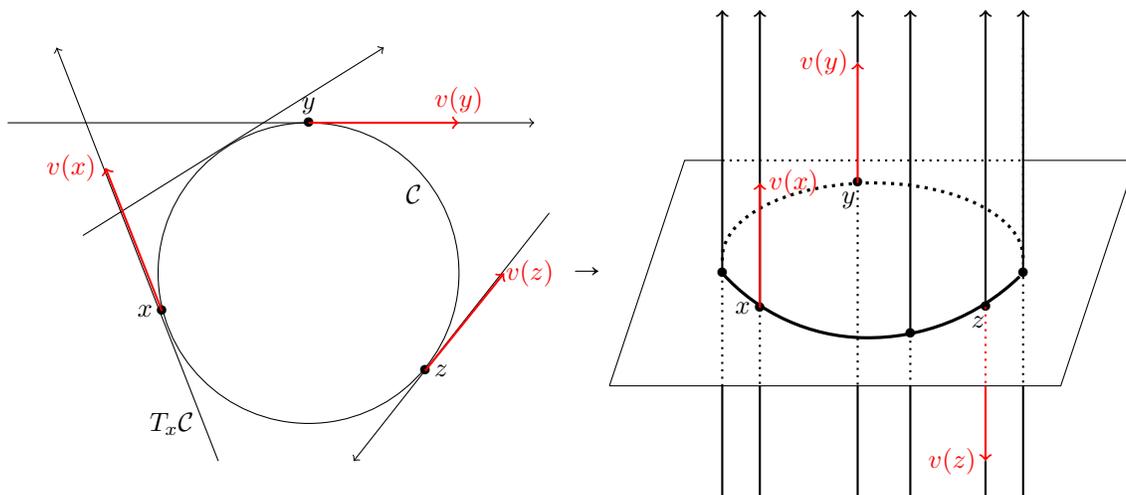


FIGURA 6. O fibrado $T\mathcal{C}$, aqui tomamos para \mathcal{C} a circunferência S^1 .

Obtemos assim uma representação de TC como um cilindro de base C . A direção positiva de T_xC é para acima e a direção negativa é para abaixo. Assim, é possível representar o vetor $v(x)$ positivo, negativo ou nulo.

Seja U um aberto de C (um segmento aberto), um campo v de vetores tangentes à C ao longo de U é uma aplicação contínua $v : U \rightarrow TC|_U$ tal que $v(x)$ pertence à $T_x(C)$, para cada $x \in U$.

Uma singularidade do campo v de vetores tangentes à C é um ponto a tal que $v(a) = 0$. Uma singularidade a será chamada de singularidade isolada se existir uma vizinhança V_a do ponto a , em C , tal que $v(a) = 0$ e $v(x) \neq 0$, para $x \in V_a \setminus \{a\}$.

5.1.2. Pontos e valores críticos, grau.

Seja $f : C \rightarrow S^1$ uma aplicação suave. Damos à curva fechada C a orientação induzida pela orientação de \mathbb{R}^2 . Consideramos a mesma orientação no secundo exemplar $\tilde{\mathbb{R}}^2$, assim temos para S^1 a orientação induzida de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A derivada da aplicação suave $f : C \rightarrow S^1$ em um ponto x da curva C , chamada de aplicação linear tangente e denotada por

$$(5.1) \quad df_x : T_xC \rightarrow T_{f(x)}S^1, \quad \text{ou seja,} \quad df_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

é definida por

$$(5.2) \quad df_x(v) = df_x(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$$

para toda curva $c :]-1, +1[\rightarrow C$ tal que $c(0) = x$ e $v(x) = c'(0)$. De fato, $f \circ c$ é uma curva sobre S^1 tal que $(f \circ c)(0) = f(x)$. Neste caso, $(f \circ c)'(0)$ é um vetor tangente à S^1 no ponto $f(x)$.

Vamos considerar agora a noção de valores críticos de uma aplicação suave $f : C \rightarrow S^1$. Um ponto $a \in C$ tal que $df_a : T_aC \rightarrow T_{f(a)}S^1$ tem o posto 0 é chamado de ponto crítico de f .

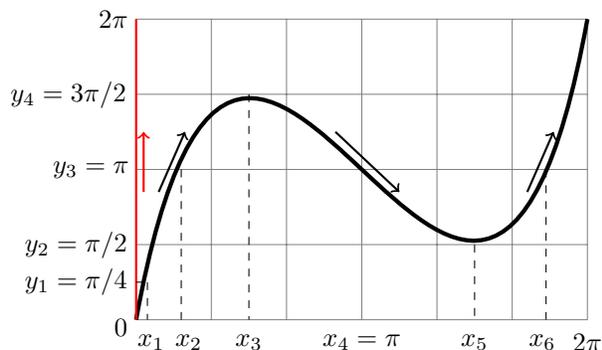
Por definição, um ponto regular da aplicação f é um ponto $x \in C$ que não é crítico. Em um ponto regular, $df_x : T_xC \rightarrow T_{f(x)}S^1$ é um isomorfismo de espaços vetoriais orientados e definimos o sinal de df_x é $+1$ ou -1 se df_x preserva ou não a orientação, respectivamente.

As imagens de pontos críticos são chamadas de valores críticos e os demais pontos são chamados valores regulares da aplicação. Então, um ponto $y \in S^1$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou todos os pontos $x \in f^{-1}(y)$ são pontos regulares de f . Em um valor regular y de f , podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x,$$

onde $\text{sign } df_x$ é o sinal de df_x no ponto $x \in f^{-1}(y)$.

Exemplo 5.3. Consideremos o exemplo da aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada pelo grafo da Figura 7.

FIGURA 7. Representação gráfica da aplicação f na esfera.

Os pontos $x_3 = \pi/2$ e $x_5 = 3\pi/2$ são pontos críticos onde a derivada se anula. O valor $y_3 = \pi$ é um valor regular tal que $f^{-1}(y_3) = \{x_2, x_4, x_6\}$. Nos pontos x_2 e x_6 a aplicação df preserva a orientação, mas no ponto x_4 , a derivada df é negativa e df inverte a orientação. Então temos:

$$(5.4) \quad \text{grau}(f; y_3) = \sum_{x \in f^{-1}(y_3)} \text{sign } df_x = \text{sign } df_{x_2} + \text{sign } df_{x_4} + \text{sign } df_{x_6} = +1 - 1 + 1 = +1.$$

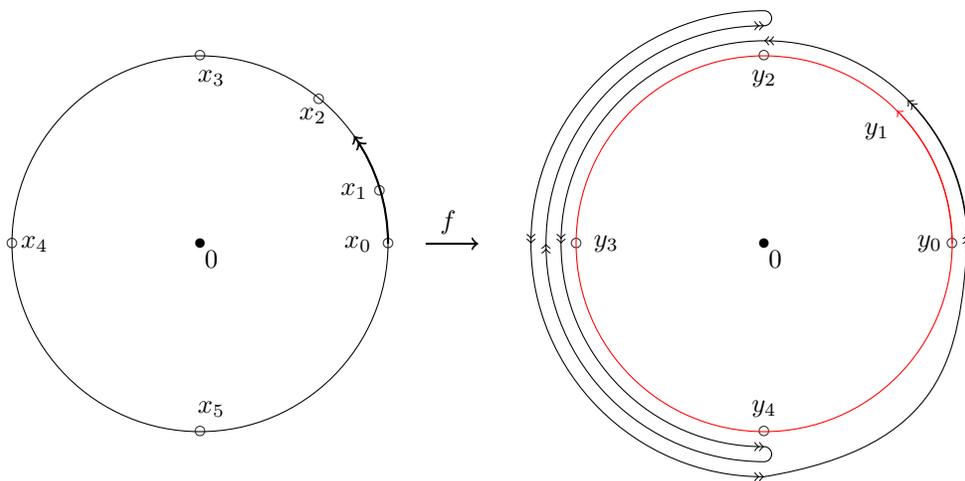


FIGURA 8. O grau da aplicação f : A “caminhada” do ponto $f(x)$ está em preto: O ponto $y_1 = \pi/4$ é um valor regular tal que $f^{-1}(y_1) = \{x_1\}$. Neste ponto, temos a mesma orientação do que a orientação da circunferência de base (vermelho), então a aplicação df preserva a orientação e temos $\text{grau}(f; y_1) = +1$. No ponto y_3 temos duas vezes a orientação da circunferência de base (positiva) e uma vez a orientação oposta (negativa). Temos $\text{grau}(f; y_3) = +1$ (veja 5.4).

Observamos que, por causa da compacidade de \mathcal{C} , então $f^{-1}(y)$ consiste em um número finito de pontos.

Uma propriedade fundamental que vamos mostrar é que $\text{grau}(f; y)$ não depende do valor regular de f , ele é denotado por $\text{grau}(f)$ e chamado grau de f .

Note que os pontos críticos não são necessariamente pontos isolados. De fato, se um ponto crítico y_i não for isolado, então existirá um intervalo (“horizontal” no grafo) $[a, b]$ tal que $f([a, b]) = y_i$. É fácil de ver que podemos substituir f por uma pequena perturbação \tilde{f} de f (por exemplo uma pequena sinusóide) com pontos críticos isolados e tal que o grau não depende da perturbação.

Quando o ponto x faz um turno completo da curva fechada C , o ponto $f(x)$ faz uma caminhada sobre a circunferência S^1 . Ele pode fazer as vezes uma volta (um retorno), as vezes ficar no mesmo lugar (ponto fixo) mas no fim do turno, ele volta no ponto de partida. Chamamos de ponto de volta (ou de retorno) os pontos $y_i = f(x_i)$ tais que y muda de sentido antes e depois de y_i (veja na Figura 8 os pontos y_2 e y_4).

Lema 5.5. Os pontos de volta são pontos críticos.

Demonstração. Em um ponto de volta, a orientação da caminhada muda de sentido. Isso significa que o sinal da derivada df_x muda. A derivada é nula em um ponto de volta, então o ponto é crítico. \square

Observação 5.6. Um ponto crítico pode não ser de volta. De fato, um ponto de inflexão do grafo de f é um ponto crítico mas o sinal de df_x não muda neste ponto.

Escolhamos como ponto de partida um ponto x_0 de C tal que $y_0 = f(x_0)$ não seja ponto crítico (então não seja ponto de volta). Quando o ponto x fizer um turno no sentido positivo, o ponto $y = f(x)$ poderá passar no ponto y_0 um certo número de vezes p_0 no sentido positivo e um número de vezes q_0 no sentido negativo. É preciso de não esquecer a passagem inicial, que também é a passagem final e que pode ser positivo ou negativo. De fato, $p_0 - q_0$ é o número de turnos que faz $y = f(x)$ em S^1 . O grau $\text{grau}(f; y_0)$ é igual a $p_0 - q_0$.

Proposição 5.7. O grau não depende do ponto regular.

Demonstração. Seja y_0 um ponto regular. Quando y_0 muda continuamente, ficando ponto regular, é claro que o número $p_0 - q_0$ não muda. Então, o grau é constante quando y descreve um intervalo de pontos regulares na circunferência S^1 . Agora, o que acontece quando encontramos um ponto crítico?

- Se o ponto crítico não for um ponto de volta, o sentido da caminhada não mudará entre antes e depois, então o número $p_0 - q_0$ não muda e o grau não muda.

- Se o ponto crítico $y_i = f(x_i)$ for um ponto de volta (por exemplo o ponto y_2 na Figura 8), então a caminhada chegará de um lado de y_i e depois a caminhada volta no mesmo lado. Antes do ponto y_i (por exemplo o ponto y_1 na Figura 8), a caminhada passa p vezes no sentido positivo e q vezes no sentido negativo. Depois do ponto y_i (por exemplo o ponto y_3 na Figura 8), a caminhada passa $p + 1$ vezes no sentido positivo e $q + 1$ vezes no sentido negativo. A diferença $p - q$, isto é o grau, não muda. \square

5.2. Caso de superfícies. Consideraremos superfícies suaves compactas, sem bordas e orientadas, por exemplo, a esfera S^2 , o toro T , etc. A definição de uma superfície suave é a seguinte:

A superfície S é suave se existe um recobrimento localmente finito $\{U_i\}$ de S e, para cada i , existe um homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow B_i$, onde B_i é um disco de dimensão dois em \mathbb{R}^2 , tais que, cada vez que $U_i \cap U_j$ não é vazio, a aplicação

$$h_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

é um difeomorfismo (veja Figura 9). Na seguinte, vamos identificar as abertos U_i com bolas B_i .

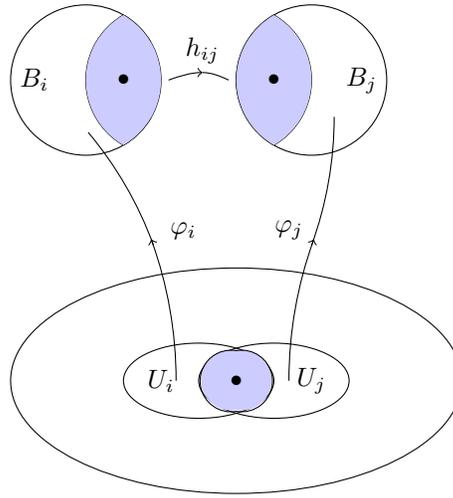


FIGURA 9. Superfície suave.

¹Localmente finito significa que para cada ponto x de S , existe uma vizinhança U_x de x em S que encontra um número finito de U_i .

5.2.1. Fibrado tangente a uma superfície suave.

Da mesma maneira que o fibrado tangente à uma curva suave, consideramos para cada ponto x de uma superfície \mathcal{S} o espaço vetorial tangente a \mathcal{S} , de dimensão 2, sobre o corpo \mathbb{R} , denotado por $T_x\mathcal{S}$.

Por exemplo, o fibrado tangente à esfera S^2 é $TS^2 = \bigcup_x T_xS^2$. Todas as fibras T_xS^2 são homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Chamamos \mathbb{R}^2 de fibra tipo. O fibrado TS^2 é localmente trivial, assim como o fibrado tangente a qualquer superfície \mathcal{S} . Isso significa que cada ponto a da superfície \mathcal{S} admite uma vizinhança U_a tal que $TS|_{U_a}$ é isomorfismo a $U_a \times \mathbb{R}^2$:

$$(5.8) \quad TS|_{U_a} \cong U_a \times \mathbb{R}^2$$

(veja Figura 10). Então, $TS|_{U_a}$ pode ser visto como uma coleção de espaços vetoriais \mathbb{R}^2 sobre U_a .

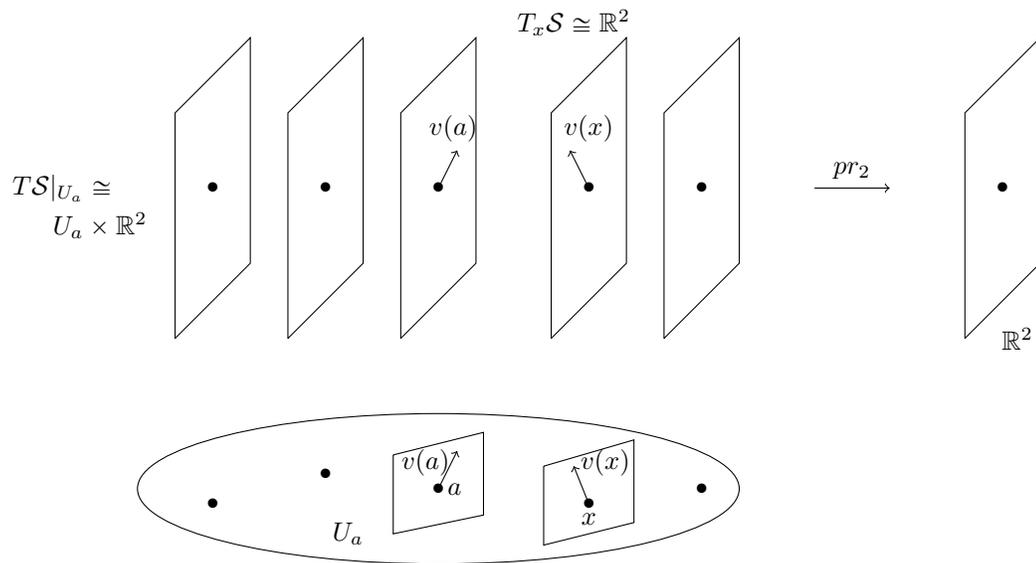


FIGURA 10. O fibrado TS é localmente trivial.

Uma superfície suave orientada é uma superfície suave \mathcal{S} com uma escolha de orientação para cada espaço tangente $T_x\mathcal{S}$, tal que para cada $x \in U_a$, a orientação de $T_x\mathcal{S}$ corresponde a orientação de $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ pelo isomorfismo (5.8).

O fibrado tangente TS^2 não é globalmente trivial, isto é, não há homeomorfismo global

$$TS^2 = S^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Isso é uma das consequências do Teorema de Poincaré-Hopf do qual veremos a prova (veja Corolário 7.3).

Mas, por exemplo, o fibrado tangente ao toro T é globalmente trivial.

Do mesmo jeito do que no caso de curva, um vetor tangente à superfície suave \mathcal{S} no ponto x é um elemento $v(x)$ de $T_x\mathcal{S}$. Podemos definir um vetor tangente como a classe de equivalência de curvas diferenciáveis $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{S}$ desenhadas sobre a superfície \mathcal{S} e tais que $c(0) = x$. Temos $v(x) = c'(0)$.

5.2.2. Pontos e valores críticos, grau.

Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação suave de uma superfície suave \mathcal{S} em \mathbb{S}^2 , do mesmo jeito do que no caso duma curva, a derivada da aplicação suave $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$, em um ponto x da curva \mathcal{S} , chamada de aplicação linear tangente e denotada por

$$(5.9) \quad df_x : T_x \mathcal{S} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{S}^2, \quad \text{ou seja} \quad df_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é definida por

$$(5.10) \quad df_x(v) = df_x(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$$

para toda curva $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{S}$ tal que $c(0) = x$ e $v(x) = c'(0)$. De fato, $f \circ c$ é uma curva sobre \mathbb{S}^2 tal que $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$. Neste caso, $(f \circ c)'(0)$ é um vetor tangente à \mathbb{S}^2 no ponto $f(x)$.

Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação suave de uma superfície suave \mathcal{S} em \mathbb{S}^2 , um ponto $a \in \mathcal{S}$ tal que a aplicação derivada

$$df_a : T_a \mathcal{S} \rightarrow T_{f(a)} \mathbb{S}^2$$

tem o posto menor do que 2 é chamado de ponto crítico de f .

Um ponto a da superfície \mathcal{S} é um ponto regular da aplicação f se ele não é crítico. As imagens de pontos críticos são chamadas de valores críticos e os demais pontos são chamados de valores regulares da aplicação.

Como no caso de dimensão 1, um ponto $y \in \mathbb{S}^2$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou todos os pontos $x \in f^{-1}(y)$ são pontos regulares de f . Em um valor regular y de f , podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x.$$

Assim, podemos ver que o grau($f; y$) não depende do valor regular de f . Portanto, podemos denotá-lo simplesmente por grau(f) e chamaremos de grau de f .

6. SINGULARIDADES DE CAMPOS DE VETORES TANGENTES – ÍNDICE EM UM PONTO SINGULAR

6.1. Singularidades de campos de vetores tangentes a uma superfície suave. Sejam \mathcal{S} uma superfície suave e U_a uma vizinhança de um ponto $a \in \mathcal{S}$. Um campo de vetores sobre U_a , tangente a \mathcal{S} é uma aplicação contínua:

$$v : U_a \rightarrow T\mathcal{S}|_{U_a}$$

tal que, para cada $x \in U_a$, $v(x) \in T_x \mathcal{S} \cong \mathbb{R}^2$.

Uma singularidade de um campo de vetores v é um ponto a tal que $v(a) = 0$.

A singularidade a é isolada se existir uma vizinhança V_a de a tal que para cada ponto x de V_a diferente de a , teremos $v(x) \neq 0$.

Mostraremos que, a uma singularidade isolada de v , podemos associar um número inteiro que chamaremos de índice do campo de vetores v no ponto a e denotaremos por $I(v, a)$. O índice de um campo de vetores pode ser definido de muitas maneiras equivalentes em vários contextos: usando grupos de homologia, usando integrais de formas diferenciais, etc. Aqui, vamos usar a definição em termos de aplicação de Gauss e de grau (veja também [Li1, Li2]).

Suponhando a superfície \mathcal{S} orientada, consideramos uma vizinhança V_a de a homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 e tal que a seja a única singularidade de v dentro de V_a . Isto é, a é uma singularidade isolada de v (veja Figura 11). Podemos considerar um segundo exemplar de \mathbb{R}^2 , denotado por $\tilde{\mathbb{R}}^2$, com a mesma orientação.

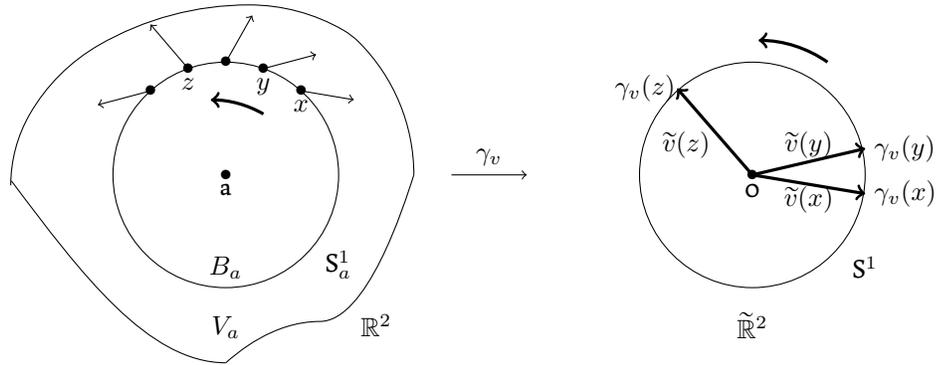


FIGURA 11. A aplicação de Gauss.

Seja B_a uma pequena bola de centro a dentro de V_a . Ao longo da esfera S_a^1 , que é a borda de B_a , o campo de vetores v não tem singularidades.

Para cada ponto x de S_a^1 , consideramos o vetor

$$\tilde{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

em $\tilde{\mathbb{R}}^2$, onde $\|v(x)\|$ é a norma euclidiana de $v(x)$.

O vetor $\tilde{v}(x)$ tem tamanho 1 e a sua extremidade, $\gamma_v(x)$, pertence à esfera S^1 de raio 1 e centro na origem de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A aplicação $\gamma_v : S_a^1 \rightarrow S^1$ é chamada de aplicação de Gauss.

Quando o ponto x fizer um turno, no sentido positivo de S_a^1 , o ponto $\gamma_v(x)$ fará certos “caminhos” (pedaços de turno) da esfera S^1 no sentido positivo ou negativo.

Observação 6.1. A orientação positiva ou negativa do pedaço de caminho do ponto $\gamma_v(x)$ providencia respectivamente a orientação positiva ou negativa de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Seja α um ponto de S^1 , um caminho passando no ponto α no sentido positivo vale $+1$ e um caminho passando no ponto α no sentido negativo vale -1 .

A soma destes valores é, por definição, o índice $I(v; \alpha)$ do campo de vetores v no ponto a . É fácil de ver que o índice $I(v, a)$ é igual ao grau de γ_v (veja §5.1.2).

Observação 6.2. Observamos que a aplicação de Gauss $\tilde{\gamma}_v$ é a composta

$$\begin{array}{ccccc} S_a^1 & \longrightarrow & TS|_{S_a^1} \cong S_a^1 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & v(x) & \mapsto & \tilde{\gamma}_v(x) \end{array}$$

(veja Definição 4.2). Esta propriedade é a base da teoria de obstrução, uma das teorias que permite de introduzir a teoria de classes características.

Exemplo 6.3. Consideramos o campo de vetores v na Figura 12. A aplicação de Gauss é a aplicação que consideramos no exemplo 5.3 e temos $I(v, 0) = +1$.

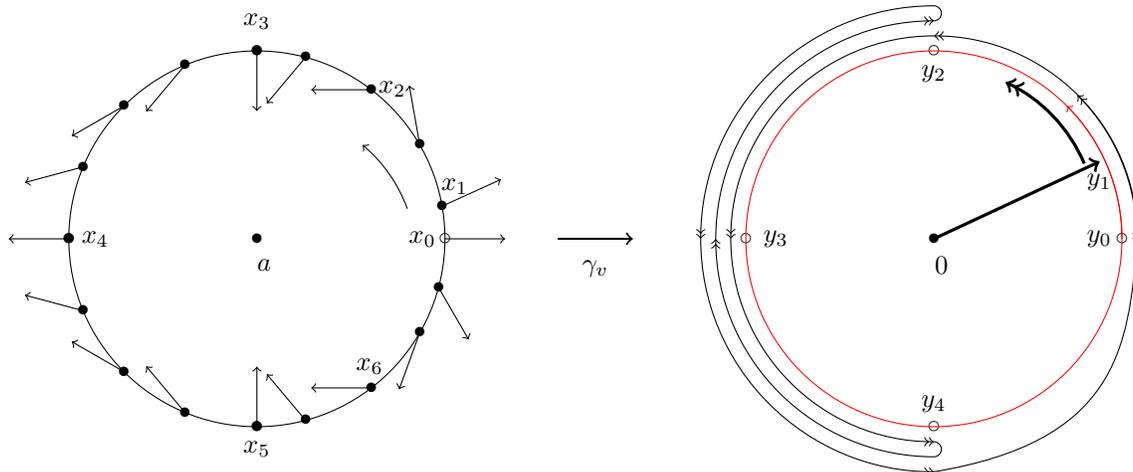


FIGURA 12. Aplicação de Gauss. Aqui: $y_0 = \gamma_v(x_0)$, $y_1 = \gamma_v(x_1)$, $y_2 = \gamma_v(x_5)$, $y_3 = \gamma_v(x_2) = \gamma_v(x_4) = \gamma_v(x_6)$ e $y_4 = \gamma_v(x_3)$.

Aqui temos alguns exemplos de índices:

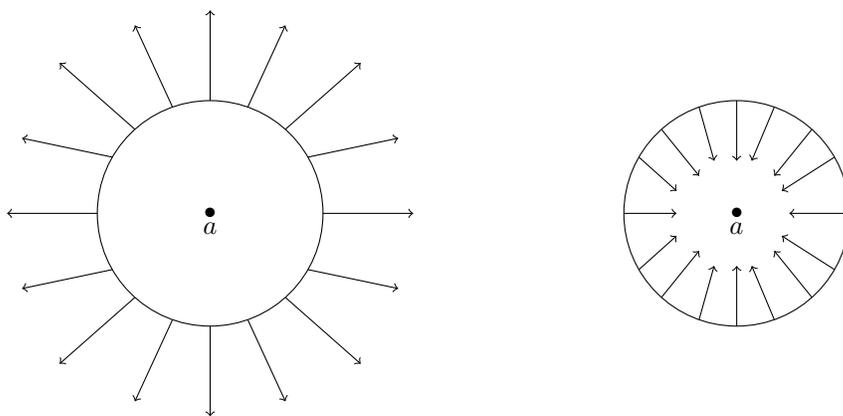


FIGURA 13. Campo radial saindo e campo radial entrando: $I(v, a) = +1$.

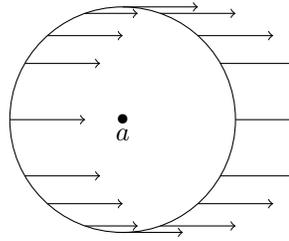


FIGURA 14. Campo de índice nulo.

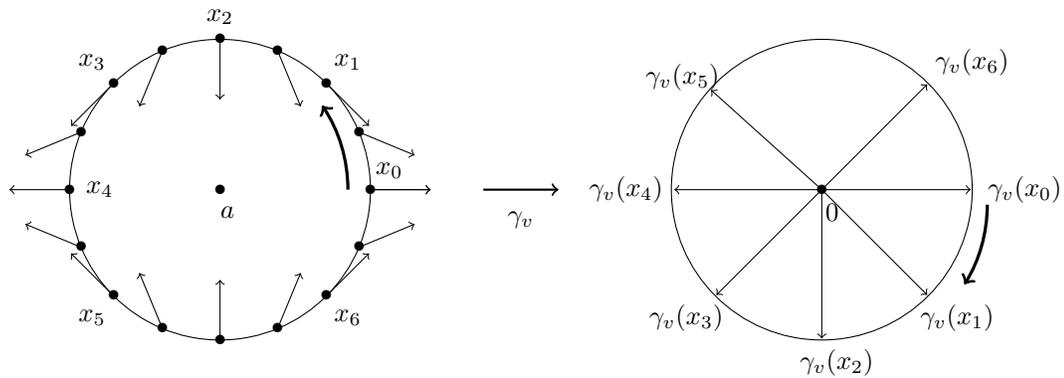


FIGURA 15. Campo de índice $I(v, a) = -1$.

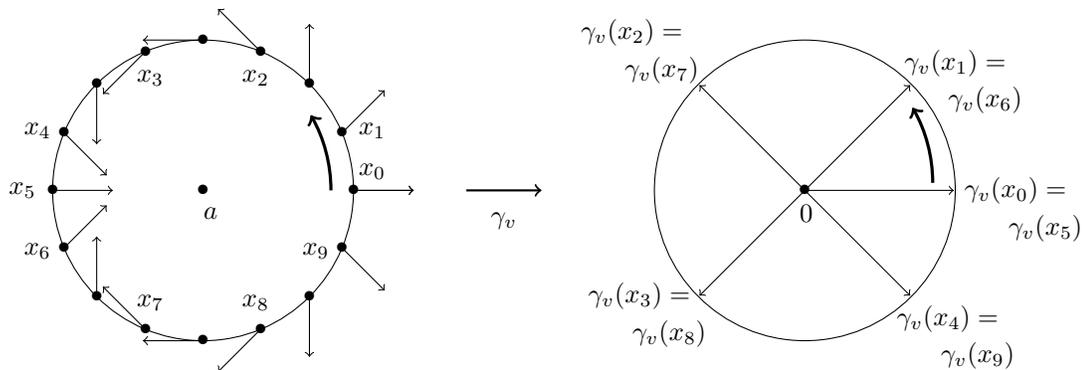


FIGURA 16. Campo de índice $I(v, a) = +2$.

Observação 6.4. Observamos que se um campo de vetores v definido sobre a borda S_a^1 de B_a se estende sem singularidades dentro de B_a , então o seu índice $I(v, a)$ vale 0. Esta observação será útil para o que se segue.

6.2. Singularidades de campos de vetores definidos em \mathbb{R}^3 .

Na segunda etapa da prova do Teorema de Poincaré-Hopf, vamos usar uma propriedade particular do índice de campos de vetores particulares em \mathbb{R}^3 . O índice de um campo de vetores em \mathbb{R}^3 define-se da mesma

maneira do que o índice de um campo de vetores em \mathbb{R}^2 . Observamos que esta definição é a mesma em um espaço euclidiano de dimensão qualquer:

Seja w um campo de vetores em \mathbb{R}^3 com uma singularidade isolada em 0. Isso significa que podemos considerar uma pequena bola B_0 centrada em 0 tal que ao longo da esfera S_0^2 , que é a borda de B_0 , o campo de vetores w não tem singularidades.

Para cada ponto x de S_0^2 , consideramos o vetor

$$\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|}$$

em um outro exemplar de \mathbb{R}^3 , com mesma orientação e chamado de $\tilde{\mathbb{R}}^3$. Aqui $\|w(x)\|$ é a norma euclidiana de $w(x)$.

O vetor $\tilde{w}(x)$ é de tamanho 1 e a sua extremidade, $\gamma_w(x)$, pertence à esfera S^2 de raio 1 e de centro à origem de $\tilde{\mathbb{R}}^3$.

A aplicação $\gamma_w : S_0^2 \rightarrow S^2$ definida por $x \mapsto \gamma_w(x)$ é chamada de aplicação de Gauss.

Como no caso anterior §5.2.2, um ponto $a \in S_0^2$ tal que a aplicação derivada

$$d(\gamma_w)_a : T_a(S_0^2) \rightarrow T_{(\gamma_w(a))}S^2$$

tem o posto menor do que 2 é chamado de ponto crítico de γ_w . Os pontos regulares e valores críticos e regulares estão definidos da mesma maneira do que §5.2.2.

Em um valor regular y de γ_w , podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(\gamma_w; y) = \sum_{x \in \gamma_w^{-1}(y)} \text{sign } d(\gamma_w)_x.$$

Como na seção §5.2.2, o número $\text{grau}(\gamma_w; y)$ não depende do valor regular de γ_w , ele é denotado por $\text{grau}(\gamma_w)$ e é chamado grau de γ_w . O índice $I(w, 0)$ do campo w em \mathbb{R}^3 com singularidade isolada em 0 é bem definido como o grau de γ_w .

Lema 6.5. Seja v um campo de vetores em \mathbb{R}^2 com singularidade isolada em $0_{\mathbb{R}^2}$, de índice $I(v, 0)$ e seja t um campo de vetores em \mathbb{R} com singularidade isolada em $0_{\mathbb{R}}$, saindo radialmente do ponto 0. A soma $w = v \oplus t$ é um campo de vetores em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ tal que $w((x, y), z) = (v(x, y), 0_{\mathbb{R}}) + (0_{\mathbb{R}^2}, t(z))$, com singularidade isolada em $0_{\mathbb{R}^3} = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}})$ de índice igual à $I(v, 0)$.

Este resultado, já usado em [Sc2], aparece no livro [BSS] como “Lemma 2.3.3”, sem prova. A prova que providenciamos aqui usa o conceito de grau. Observamos que a hipótese sobre o campo t implica que o índice $I(t, 0_{\mathbb{R}})$ vale +1.

Demonstração. Denotamos por B_0 a bola de centro 0 e de raio 1 em \mathbb{R}^3 . A bola B_0 é homeomorfa à $D^2 \times I$, onde D^2 é um disco de dimensão dois e I é o intervalo $[-1, +1]$. A borda de B_0 , isto é, a esfera S_0^2 é homeomorfa à lata $(S^1 \times I) \cup (D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\}))$.

Na lata, temos coordenadas $((r, \alpha), \lambda)$ tais que: sobre $(S^1 \times I)$, temos $r = 1, \alpha \in [0, 2\pi[$ e $\lambda \in [-1, +1]$; sobre $D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\})$ temos $r \in [0, r], \alpha \in [0, 2\pi[$ e $\lambda \in \{-1\} \cup \{+1\}$. Observamos que, quando $r = 0$, a coordenada α não é definida.

Construímos um campo de vetores w sobre $(S^1 \times I) \cup (D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\}))$ da seguinte maneira:

a) sobre $(S^1 \times I)$, no ponto $x = (1, \alpha, \lambda)$, o campo $w(x)$ vale $v(1, \alpha) + t(\lambda)$;

b) sobre $D^2 \times \{-1\}$ (respectivamente, $D^2 \times \{+1\}$), no ponto $x = (r, \alpha, k)$ o campo $w(x)$ é $v(r, \alpha) + t(k)$ com $k = -1$ ou $k = +1$, respectivamente.

O campo w assim definido é o que é chamado de prolongamento radial de v em [Sc2]. O campo w tem uma singularidade isolada na origem $0_{\mathbb{R}^3} = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}})$.

Consideramos em \mathbb{R}^3 a orientação dada pela orientação de \mathbb{R}^2 seguida pela orientação de \mathbb{R} . Observamos que, como o campo de vetores t é radial saindo de $0_{\mathbb{R}}$, este campo conserva a orientação de \mathbb{R} . Então, localmente, a orientação induzida por w em \mathbb{R}^3 é a mesma que a orientação induzida por v em \mathbb{R}^2 , seja positiva ou seja negativa (veja Observação 6.1).

Em cada ponto x de S_0^2 (ou da lata), temos $w(x) \neq 0$. Como no caso de dimensão 2, podemos considerar a aplicação de Gauss

$$\gamma_w : S_0^2 \rightarrow S^2, \quad \gamma_w(x) \text{ é a extremidade do vetor } \tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|}.$$

Seja γ_v a aplicação de Gauss correspondente ao campo v , definida como na seção 5.2.2. Um valor regular de γ_w também é um valor regular de γ_v . Neste valor, as orientações de γ_v e γ_w coincidem. Logo, temos

$$\text{grau}(\gamma_w) = \text{grau}(\gamma_v).$$

Portanto, os índices $I(w, 0_{\mathbb{R}^3}) = \text{grau}(\gamma_w)$ e $I(v, 0_{\mathbb{R}^2}) = \text{grau}(\gamma_v)$ coincidem. \square

7. TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

O Teorema de Poincaré-Hopf foi provado por Poincaré no ano 1885 no caso de superfícies, depois por Hopf, no ano 1927, para o caso de variedades suaves de dimensão maior.

Teorema 7.1. Seja v um campo de vetores com singularidades isoladas, tangente a uma superfície S compacta, suave, sem borda e não necessariamente orientada. Temos

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \chi(S),$$

onde os pontos a_i são os pontos singulares de v .

Antes de oferecer uma ideia para a prova, voltamos aos exemplos que já consideramos: um exemplo de campos de vetores sobre a esfera S^2 é dado na Figura 17. Neste exemplo, o campo tem singularidades de índice $+1$ nos polos norte e sul (campos radiais saindo e entrando, respectivamente, veja Figura 13). Tem-se que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2, que também é a soma dos índices nos pontos singulares.

No toro, existem campos de vetores tangentes sem nenhuma singularidade (veja Figura 18). Então a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ vale 0, o que é a característica de Euler-Poincaré do toro.

No plano projetivo \mathbb{P}^2 , que não é orientável, a Figura 19 providencia um campo de vetores tangentes, com somente uma singularidade de índice $+1$. Isto é a característica de Euler-Poincaré do espaço projetivo.

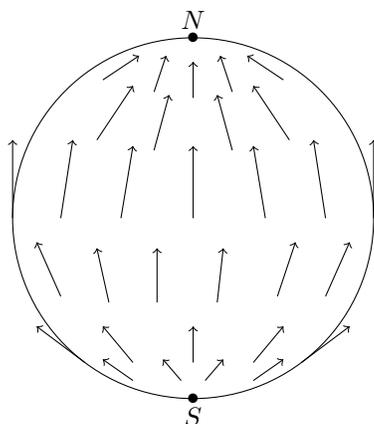


FIGURA 17. Campo de vetores tangentes a esfera S^2 . Temos $I(v, N) = I(v, S) = +1$.

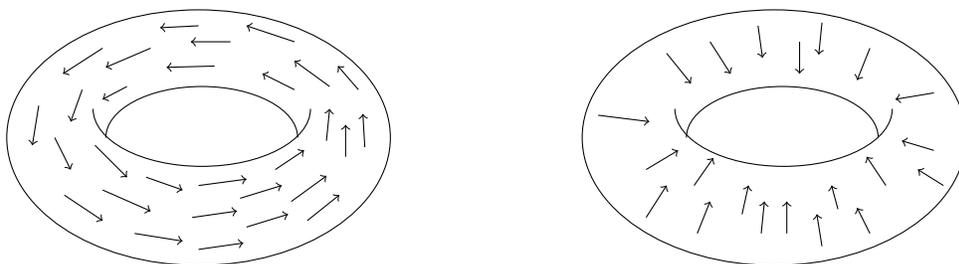


FIGURA 18. Campos de vetores tangentes ao toro T : Campo tangente as “paralelas” e campo tangente as “meridianas”. Não há singularidades.

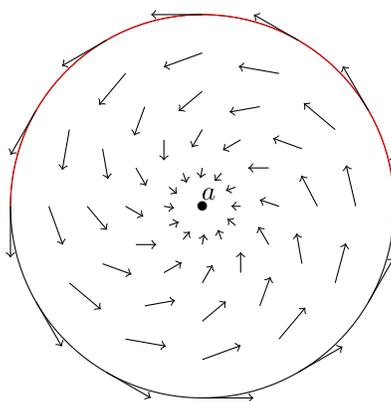


FIGURA 19. Campo de vetores tangentes ao plano projetivo \mathbb{P}^2 . Aqui, o plano projetivo é representado como um disco onde os pontos diametralmente opostos da borda são identificados (veja Figura 3). Temos $I(v, a) = +1$ (veja Figura 13).

Mostraremos o Teorema de Poincaré-Hopf no caso não-orientável depois de estudar o caso orientado.

7.1. Caso orientável. A prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso orientado pode ser feita em duas etapas:

a) Exibir um campo de vetores v tal que

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \chi(\mathcal{S}).$$

b) Provar que a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ não depende do campo de vetores v tangente a \mathcal{S} com singularidades a_i , nem do número de singularidades, isto é, para quaisquer campos de vetores v e v' com singularidades isoladas sobre \mathcal{S} , então

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \sum_{b_j} I(v', b_j),$$

onde a_i e b_j são as singularidades dos campos v e v' , respectivamente.

7.1.1. Primeira etapa.

A primeira etapa exibe um campo de vetores com uma construção bonita, devido a H. Hopf, que vamos descrever com detalhes.

Seja K uma triangulação de \mathcal{S} . Para cada simplexo de dimensão 2, vamos construir um campo, chamado de campo de Hopf, como seguinte:

Para cada simplexo σ de K , escolhamos um baricentro denotado por $\hat{\sigma}$.

Um simplexo de dimensão n , onde $n = 0, 1, 2$, será denotado por σ^n , e seu baricentro denotado por $\hat{\sigma}^n$.

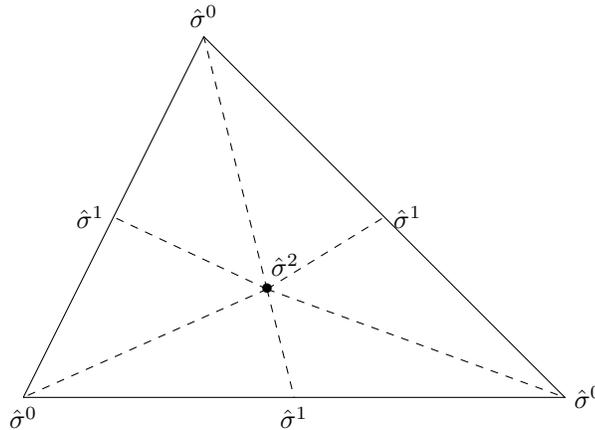


FIGURA 20. Baricentros e decomposição baricêntrica.

A escolha de baricentros permite definir a decomposição baricêntrica de K , denotada por K' , cujos vértices são todos baricentros $\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1$ e $\hat{\sigma}^2$, os segmentos serão denotados por $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$ com $i < j$ e triângulos por $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

As singularidades do campo v serão todos baricentros $\hat{\sigma}^i, i = 0, 1, 2$, e somente estes pontos. O campo será tangente aos segmentos $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$ da decomposição baricêntrica, saindo de $\hat{\sigma}^i$ e indo na direção de $\hat{\sigma}^j$

($i < j$). Como o campo v se anula nos pontos $\hat{\sigma}^i$ e $\hat{\sigma}^j$, ele está crescendo saindo de $\hat{\sigma}^i$ até um máximo e depois ele decresce até se anular no ponto $\hat{\sigma}^j$ (Figura 21).

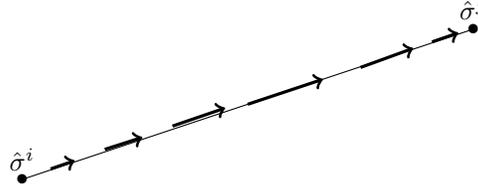


FIGURA 21. O campo de Hopf ao longo de $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$.

No triângulo $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$, o campo é construído de tal maneira a ser contínuo e satisfazer as condições anteriores (Figura 22).

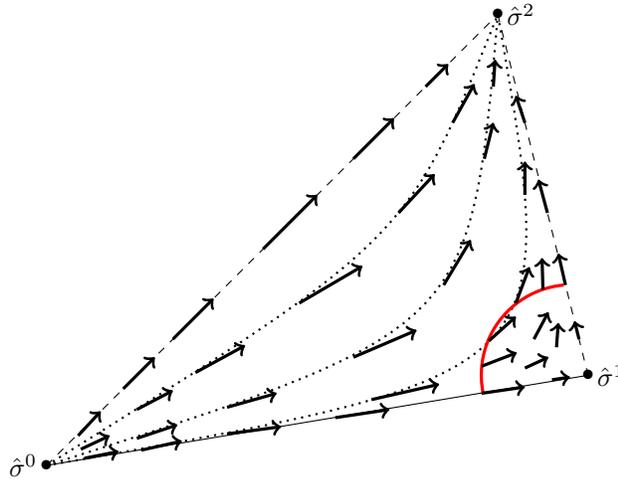


FIGURA 22. O campo de Hopf no triângulo $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

O campo de Hopf, a partir de sua construção, admite como singularidades os baricentros de todos os simplexos de K .

A situação local é a mesma para todos baricentros $\hat{\sigma}^0$ (Figura 23).

Isto é, o índice $I(v, \hat{\sigma}^0) = +1$ (veja Figura 13) para todo baricentro $\hat{\sigma}^0$.

Da mesma maneira, para todo baricentro $\hat{\sigma}^1$, temos a situação local da Figura 24.

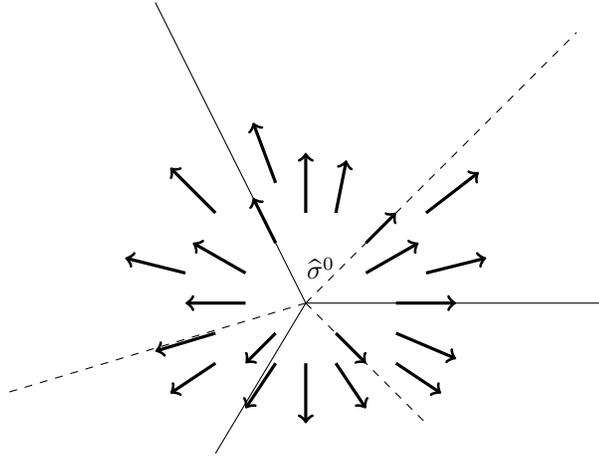
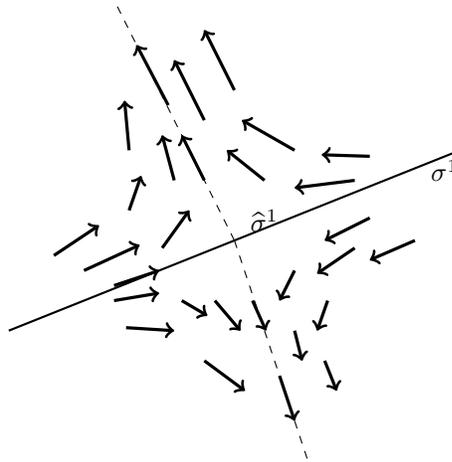
Isto é, o índice $I(v, \hat{\sigma}^2) = +1$ (campo radial entrando, veja Figura 13) para todo baricentro $\hat{\sigma}^2$.

Agora, vamos calcular a soma

$$\sum_{a_i} I(v, a_i)$$

para todos os pontos singulares a_i do campo de vetores v . Os pontos singulares são:

- + os baricentros $\hat{\sigma}_i^0$ dos vértices σ_i^0 ,
- + os baricentros $\hat{\sigma}_j^1$ dos segmentos σ_j^1 ,

FIGURA 23. O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^0$.FIGURA 24. O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^1$.

+ os baricentros $\hat{\sigma}_k^2$ dos triângulos σ_k^2 .

Então, tem-se

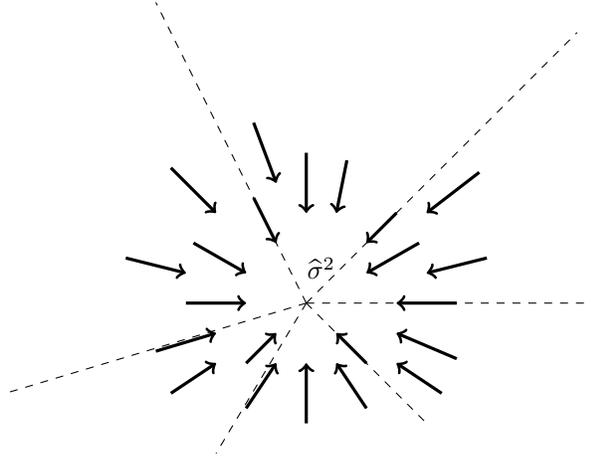
$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \sum_{\sigma_i^0} I(v, \hat{\sigma}_i^0) + \sum_{\sigma_j^1} I(v, \hat{\sigma}_j^1) + \sum_{\sigma_k^2} I(v, \hat{\sigma}_k^2).$$

Mas vemos que, para todo σ_i^0 , temos $I(v, \hat{\sigma}_i^0) = 1$, então $\sum_{\sigma_i^0} I(v, \hat{\sigma}_i^0)$ é o número n_0 dos vértices.

Da mesma maneira, para todo σ_j^1 , temos $I(v, \hat{\sigma}_j^1) = -1$, então $\sum_{\sigma_j^1} I(v, \hat{\sigma}_j^1)$ é igual a $-n_1$, onde n_1 é o número dos segmentos. Enfim, para todos σ_k^2 , temos $I(v, \hat{\sigma}_k^2) = +1$, então $\sum_{\sigma_k^2} I(v, \hat{\sigma}_k^2)$ é igual ao número n_2 dos triângulos.

Então, temos

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = n_0 - n_1 + n_2 = \chi(\mathcal{S}),$$

FIGURA 25. O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^2$.

onde a_i são todos os pontos singulares do campo de vetores v .

7.1.2. Segunda etapa.

A segunda etapa é a mais delicada e há várias maneiras de trabalhar. Vamos providenciar as ideias de Heinz Hopf [Ho1, Ho2], revisitadas por John Milnor [Mi] e Marie-Hélène Schwartz [Sc1].

Sendo um campo v de vetores tangentes a S , com singularidades isoladas a_i , vamos estender o campo em uma vizinhança X_ε de S , com as mesmas singularidades e os mesmos índices. Isto é chamado de prolongamento radial. A vizinhança X_ε tem borda ∂X_ε sobre a qual é definida a aplicação de Gauss

$$n : \partial X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que associa a cada ponto $y \in \partial X_\varepsilon$ o vetor normal unitário $n(y)$ saindo de X_ε no ponto y . A segunda etapa será concluída mostrando que se a soma dos índices do campo v é igual ao grau da aplicação de Gauss, então esta soma é independente do campo v e do número de pontos singulares de v .

O método de prolongamento radial apareceu pela primeira vez, e ao mesmo tempo, no livro de John Milnor, "Topology from the differential viewpoint", e na construção de classes características de variedades singulares de Marie-Hélène Schwartz. Milnor providenciou esta construção no caso de campos de vetores com singularidades não degeneradas, isto é, de índice $+1$ ou -1 , sobre variedades suaves. Ele não percebeu que sua construção vale para uma singularidade isolada de qualquer índice. Marie-Hélène Schwartz providenciou a construção no caso de singularidades isoladas de qualquer índice, e sobre variedades singulares, o que é muito mais geral e mais delicada.

Agora, vamos à construção. Em primeiro lugar, vamos construir o prolongamento radial de um campo de vetores tangentes a S com singularidades isoladas nos pontos a_i .

Chamamos X_ε a vizinhança fechada de S , de "tamanho" ε , isto é, o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|x - y\| \leq \varepsilon$ para um ponto $y \in S$. Para ε suficientemente pequeno, X_ε é uma variedade suave de dimensão 3 em \mathbb{R}^3 , com borda ∂X_ε .

O campo de vetores radiais, dentro de X_ε é construído da seguinte maneira: para $x \in X_\varepsilon$, seja $r(x)$ o ponto de \mathcal{S} mais próximo de x . O vetor $t(x) = x - r(x)$ (em \mathbb{R}^3) é ortogonal ao espaço tangente a \mathcal{S} no ponto $r(x)$, senão, $r(x)$ não seria o ponto de \mathcal{S} mais próximo de x . O vetor $t(x)$ é chamado de transversal.

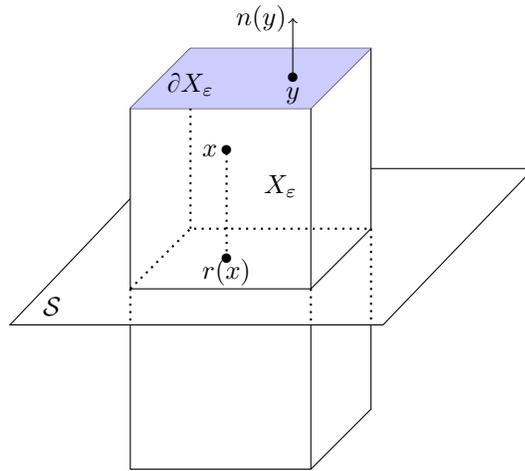


FIGURA 26. A vizinhança X_ε .

Para ε suficientemente pequeno, a função $r : X_\varepsilon \rightarrow \mathcal{S}$ é suave e bem definida. Seja φ a função

$$\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2,$$

onde " $\| \cdot \|$ " é a norma euclidiana em \mathbb{R}^3 . O gradiente de φ é dado por

$$\text{grad}\varphi = 2(x - r(x)).$$

Em cada ponto y da borda $\partial X_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$, o vetor normal unitário, saindo de X_ε é dado por

$$n(y) = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} = \frac{(y - r(y))}{\varepsilon}.$$

Estendemos o campo de vetores v (definido sobre \mathcal{S}) em um campo de vetores w definido sobre X_ε da seguinte maneira:

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)),$$

ou seja

$$w(x) = t(x) + v(r(x)).$$

Lembramos que $t(x) = x - r(x)$ é chamado de campo de vetores transversal, ele é independente de v e é transversal ao plano tangente a \mathcal{S} . Chamamos $v(r(x))$ de campo de vetores paralelos. Ele é paralelo ao plano tangente a \mathcal{S} (veja Figura 27).

Quais são as propriedades do campo de vetores w ?

Por um lado, para $y \in \partial X_\varepsilon$, o produto escalar $w(y) \cdot n(y)$ vale $\varepsilon > 0$, então o campo de vetores w sai de X_ε ao longo da borda ∂X_ε . Por outro lado, w se anula nos mesmos pontos que v . De fato, no ponto $x \in X_\varepsilon$, os vetores $(x - r(x))$ e $v(r(x))$ são ortogonais.

Seja a uma singularidade do campo v , ao longo da "fibra" $r^{-1}(a) = \{x \in X_\varepsilon : r(x) = a\}$ da vizinhança X_ε , o campo w vale $(x - a)$, o que é um campo de vetores com singularidade isolada no ponto a , com índice $+1$. Assim que demonstrado em [Sc2], o campo w é a soma de dois campos de vetores que são ortogonais: o campo $t(x)$ que é transversal, nulo ao longo de X_ε e o campo paralelo $v(r(x))$, nulo em todos pontos z tais que $r(z) = a$. Então w admite as mesmas singularidades que $v(x)$.

Como o campo de vetores t sai radialmente do ponto a na fibra $r^{-1}(a)$, o Lema 6.5 mostra que o índice do campo de vetores w definido em X_ε , no ponto singular a é igual ao índice do campo de vetores v definido na superfície \mathcal{S} no mesmo ponto singular a . Podemos escrever isso como

$$I(w, a; X_\varepsilon) = I(v, a; \mathcal{S}).$$

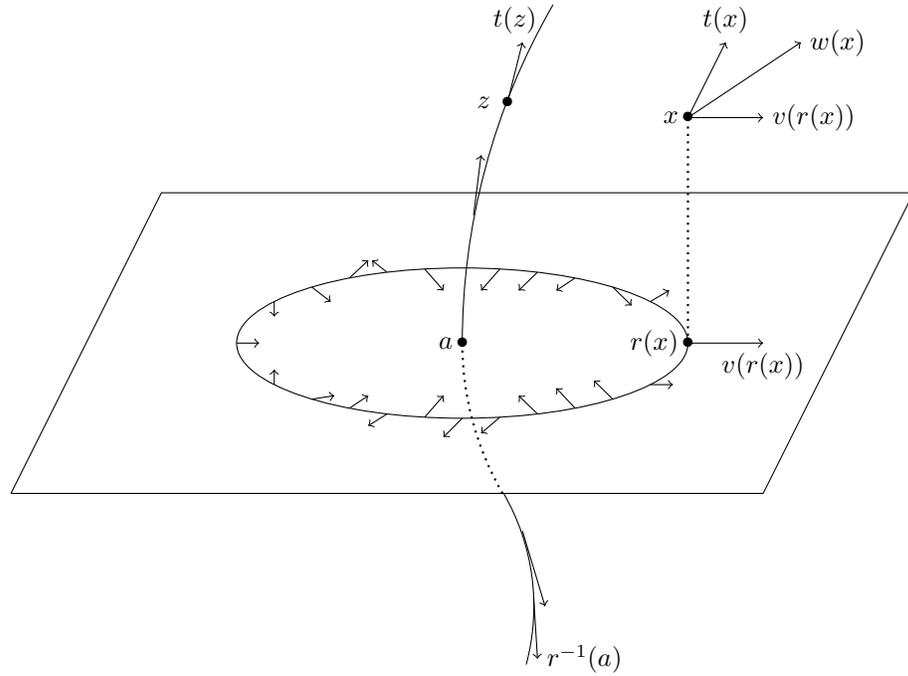


FIGURA 27. O campo de vetores $w(x)$ é soma do campo transversal $t(x)$ e do campo paralelo $v(r(x))$.

Agora, temos um campo de vetores w definido sobre X_ε satisfazendo as seguintes propriedades: w tem as mesmas singularidades que v e os mesmos índices nos pontos singulares, e w está saindo de X_ε ao longo da borda ∂X_ε .

Para concluir a segunda etapa, vamos usar (e mostrar) o seguinte resultado de Hopf: se

$$w : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é um campo de vetores suave com singularidades isoladas, saindo de X_ε ao longo da borda ∂X_ε , então a soma $\sum_{a_i} I(w, a_i; X_\varepsilon)$ é igual ao grau da aplicação de Gauss associada a $n : \partial X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^2$. Isso implica que

a soma $\sum_{a_i} I(w, a_i; X_\varepsilon)$ não depende do campo w , e como consequência, a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ não depende do campo v tangente a S com singularidades isoladas.

O resultado de Hopf pode ser visto do seguinte jeito: Considaremos uma pequena bola $B_\eta(a_i)$ ao redor de cada ponto a_i em X_ε . O raio $\eta \ll \varepsilon$ é suficientemente pequeno para que as bolas estejam no interior de X_ε e não se interseccionam. A variedade

$$X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$$

é uma variedade suave com borda

$$\partial \left[X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \right] = \partial X_\varepsilon \cup - \left[\bigcup_i \partial B_\eta(a_i) \right],$$

onde sinal “-” vem do que a orientação de $\partial B_\eta(a_i)$ como borda da bola $B_\eta(a_i)$ é a orientação oposta de $\partial B_\eta(a_i)$ como elemento da borda de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$.

Agora, a aplicação de Gauss

$$\gamma_w : \partial \left[X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \right] \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \text{associada a } \tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|},$$

que é bem definida sobre a borda de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$, se estende a uma aplicação

$$\gamma_w : X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \rightarrow \mathbb{S}^2$$

sem nenhuma singularidade. Com efeito, todas as singularidades de \tilde{w} estão nas bolas $B_\eta(a_i)$.

Sabemos que se um campo de vetores v , definido sobre a borda de uma bola $B(a)$, se estende sem singularidades dentro de $B(a)$, então o índice $I(v, a)$ (o seu grau) vale 0 (veja Observação 6.4). Isso é um caso particular de uma propriedade importante do grau: se uma aplicação $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida sobre a borda de uma variedade Y de dimensão 3 em \mathbb{R}^3 , se estende sem singularidade no interior de Y , então $\text{grau}(f) = 0$.

Como γ_w se estende sem singularidade a uma aplicação $\gamma_w : X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \rightarrow \mathbb{S}^2$, isso implica que o grau de γ_w sobre a borda de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$ vale 0. Em outras palavras, a soma dos graus de γ_w sobre os componentes da borda de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$ vale 0. Isto é

$$\text{grau}(\gamma_w; \partial X_\varepsilon) - \sum_i \text{grau}(\gamma_w; \partial B_\eta(a_i)) = 0,$$

onde não esquecemos do sinal “-” por causa de orientação.

Por um lado, \tilde{w} está saindo de X_ε ao longo da sua borda e \tilde{w} pode ser deformado continuamente no campo de vetores n normais, saindo de X_ε ao longo da sua borda. A deformação (ou homotopia), sendo contínua e com vetores saindo de X_ε ao longo da sua borda, faz com que o grau, que é um número inteiro, permaneça o mesmo, o que implica que $\text{grau}(\gamma_w; \partial X_\varepsilon) = \text{grau}(n)$.

Por outro lado, pela definição do índice, $\text{grau}(\gamma_w; \partial B_\eta(a_i)) = I(w, a_i; X_\varepsilon) = I(v, a_i)$. Finalmente temos

$$\sum_i I(v, a_i) = \text{grau}(n),$$

o que não depende do campo de vetores v com singularidades isoladas sobre S . Assim, concluímos a prova no caso orientável.

7.2. Caso não orientável. No caso de superfícies não orientáveis, consideremos o cobrimento duplo e orientado. Isto é, em um ponto x de uma superfície orientada \hat{S} , consideramos o conjunto de pares (x, o_x) , onde o_x é uma orientação local de S em x . São duas orientações locais possíveis, então temos uma aplicação $\pi : \hat{S} \rightarrow S$, tal que $\pi^{-1}(x)$ contém dois pontos (correspondente às duas orientações). O cobrimento duplo orientado $\pi : \hat{S} \rightarrow S$ é um homeomorfismo local.

Por exemplo, no caso do espaço projetivo \mathbb{P}^2 , o cobrimento duplo orientado é a projeção canônica $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. No caso da garrafa de Klein K^2 , o cobrimento duplo orientado é a projeção do toro $\pi : T^2 \rightarrow K^2$. No caso de uma superfície orientada, a projeção $\pi : \hat{S} \rightarrow S$ é isomorfa a $\pi : S \times \mathbb{Z}/2 \rightarrow S$, isto é \hat{S} não é conexa e é a união de dois exemplares de S .

Agora, seja S uma superfície compacta suave e não orientada. Por um lado, se v é um campo contínuo de vetores sobre S com singularidades isoladas a_i de índice $I(v; a_i)$, então, podemos definir um levantamento \hat{v} de v que é um campo contínuo de vetores sobre \hat{S} com pontos singulares isoladas a_i^j com $j = 1, 2$, tais que $\pi(a_i^j) = a_i$. Como π é um homeomorfismo local, temos $I(v; a_i^j) = I(v; a_i)$ para cada $j = 1, 2$. Então $\sum_{i,j} I(\hat{v}; a_i^j) = 2 \sum_i I(v; a_i)$.

Por outro lado, podemos definir uma triangulação de \hat{S} tal que os simplexos de \hat{S} são imagens inversas dos simplexos de S . A imagem inversa de cada um dos simplexos de S consiste em dois simplexos de \hat{S} de mesma dimensão. Os números de simplexos n_0, n_1 e n_2 de \hat{S} são dobro dos números correspondentes de S . Então temos $\chi(\hat{S}) = 2\chi(S)$.

Como \hat{S} é uma superfície compacta suave e orientada, sabemos, pela prova no caso orientável, que $\chi(\hat{S}) = \sum_{i,j} I(\hat{v}; a_i^j)$.

Assim obtemos o Teorema de Poincaré-Hopf para superfícies não orientáveis:

$$\chi(S) = 1/2 \cdot \chi(\hat{S}) = 1/2 \sum_{i,j} I(v; a_i^j) = \sum_i I(v; a_i).$$

7.3. Conclusões.

Ao procurarmos por “Poincaré-Hopf Theorem” em um site da internet, vemos várias aplicações em mecânica, física, química, ciências exatas, economica, etc.

A razão mais importante é que temos:

Teorema 7.2. Uma variedade S suave, compacta e sem borda admite um campo de vetores tangentes sem singularidades se, e somente se, $\chi(S) = 0$.

Corolário 7.3. É impossível construir um campo de vetores tangentes à esfera S^2 , sem singularidades. O mesmo resultado vale para o plano projetivo \mathbb{P}^2 .

A consequência deste resultado é que o fibrado tangente à esfera S^2 não é trivial. O mesmo resultado vale para todas esferas de dimensão par.

REFERÊNCIAS

- [Br] J.-P. Brasselet, Radial Vector Fields and the Poincaré-Hopf Theorem, RAGOS (AMS) Contemporary Mathematics, Vol 253, (2000), 25 - 30.
- [BN] J.-P. Brasselet, e Thuy, N.T.B, A característica de Euler-Poincaré, ArXiv: 1611.03918
- [BSS] J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, Vector fields on Singular Varieties, Lecture Notes in Mathematics No 1987, Springer-Verlag, 2010.

- [Epp] D. Eppstein, Geometry Junkyard Nineteen Proofs of Euler Formula,
<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>
- [Ho1] H. Hopf, Über die Curvatura Integra geschlossener Hyperflächen, *Math. Annalen* 95 (1925), 340-367.
- [Ho2] H. Hopf, Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen* 96 (1927), 225-250.
- [Li1] E.L. Lima, A característica de Euler-Poincaré, *Matemática Universitária*, No 1, 1985, 47-62.
- [Li2] E.L. Lima, O teorema de Euler sobre poliedros, *Matemática Universitária*, No 2, 1985, 57-74.
- [Mi] J. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [Po2] H. Poincaré, Sur l'Analysis situs, *CRAS* vol. 115 (1892) 633-636.
- [Po3] H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres, *CRAS* vol. 117 (1893) 144.
- [Sc1] M.-H. Schwartz, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, *CRAS* 260, (1965), 3262-3264 et 3535-3537.
- [Sc2] M.-H. Schwartz, Champs radiaux sur une stratification analytique, *Travaux en cours*, 39 (1991), Hermann, Paris.

CNRS I2M, AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ, MARSEILLE, FRANCE.

Email address: jean-paul.brasselet@univ-amu.fr

UNESP, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, "JÚLIO DE MESQUITA FILHO", São José do Rio Preto, BRASIL

Email address: bi.ch.thuy@unesp.br